ABSTRAKSI CHEMICAL TOPOLOGICAL GRAPH (CTG) MELALUI INDEKS TOPOLOGIS GRAF ALJABAR

Salsabila Hadi Putri Ningrum, Ayes Malona Siboro, Sahin Two Lestari, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana*, Zata Yumni Awanis

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Pengetahuan Alam, Universitas Mataram
Jl. Majapahit No.62, Mataram, Nusa Tenggara Barat. 83115

*Corresponding Author Email: adhitya.wardhana@unram.ac.id

ABTSRAK.
Dalam bidang kimia teoritis dan komputasional, penggunaan Chemical Topological Graph (CTG) sebagai representasi grafis molekul memainkan peran penting dalam memahami struktur molekul dan sifat-sifat kimianya. CTG memungkinkan visualisasi molekul, analisis ikatan kimia, dan pengembangan model prediktif. Kaitan antara CTG dan struktur aljabar terjadi melalui konsep representasi graf, yang membuka pintu bagi penerapan metode dan konsep aljabar dalam analisis dan pemodelan molekul. Dalam artikel ini, diberikan abstraksi hubungan antara graf topologis kimia dan struktur aljabar melalui representasi graf. Hasil yang didapatkan.

Keyword: Graf Topologi Kimia, Representasi Graf, Struktur Aljabar

1. PENDAHULUAN

Chemical Topological graph adalah representasi grafis molekul dalam kimia teoritis dan komputasional. Dalam Chemical Topological Graph (CTG), atom-atom dalam molekul direpresentasikan sebagai simpul-simpul, sedangkan ikatan antara atom direpresentasikan sebagai sisi-sisi yang menghubungkan simpul-simpul tersebut. CTG membantu dalam menganalisis struktur molekul, memahami ikatan kimia, dan memprediksi sifat dan perilaku kimia molekul. CTG ini memainkan peran penting dalam pengembangan model prediktif dan metode simulasi molekul (Hua et al., 2019).

Kaitan antara CTG dengan struktur aljabar terjadi melalui konsep homomorfisma graf. Homomorfisma graf adalah kondisi dimana dua graf yang masih mempertahankan hubungan struktural antara simpul-simpul dan sisi-sisi graf tersebut. Melalui homomorfisma graf, CTG suatu molekul dapat dikaitkan dengan struktur aljabar. Sebagai contoh, graf dari suatu molekul dapat dicari keidentikannya dalam suatu homomorfisma, yang kemudian dapat ditemukan struktur grup dari graf tersebut, hal ini memungkinkan penerapan konsep struktur aljabar dalam analisis dan pemodelan molekul (Wagner & Wang, 2019).

Oleh karena itu pada tulisan ini akan diberikan berbagai indeks topologi graf dari suatu struktur aljabar untuk memudahakan mencari homomorfisma graf antara representasi graf molekul dan representasi graf dari sutau objek pada struktur aljabar. Hal ini diharapkan memberikan jalan dalam penerapan metode dan konsep aljabar pada CTG.

2. METODE

Metode Penelitian memuat uraian terkait pendekatan, jenis, dan desain penelitian. Selanjutnya, Metode Penelitian menjelaskan data dan sumber data, metode dan teknik pengumpulan data, prosedur pengumpulan data, instrumen pengumpulan data, metode dan teknik penganalisisan data, serta metode dan teknik penyajian hasil penganalisisan data. Metode Penelitian harus berisi uraian operasional metode dan bukan hanya berisi definisi dari metode yang digunakan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Indeks topologi dalam graf teori adalah parameter penting yang digunakan untuk menganalisis struktur molekul kimia, membantu memahami sifat-sifat dan hubungan antara atom-atom dalam molekul.

Indeks Topologi

Indeks Zagreb adalah parameter topologi molekul yang digunakan dalam kimia untuk menggambarkan kompleksitas molekul berdasarkan struktur grafiknya. Indeks ini diberi nama berdasarkan nama kota Zagreb, ibu kota Kroasia, tempat asal penemuannya. Indeks Zagreb dapat digunakan untuk memprediksi sifat-sifat fisikokimia molekul, seperti titik didih, titik leleh, entalpi pembakaran, indeks refraksi, dan sebagainya. Indeks ini juga dapat digunakan dalam penentuan struktur molekul, peramalan aktivitas biologis, dan korelasi struktur-aktivitas dalam penelitian obat-obatan. Secara umum, semakin besar Indeks Zagreb suatu molekul, semakin kompleks strukturnya. Namun, indeks ini hanya memberikan informasi topologis dan tidak memberikan detail tentang ikatan kimia spesifik dalam molekul (Mansour et al., 2016).

Terdiri dari dua indeks, dan dinamakan indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua. Indeks pertama didefinisikan sebagai jumlah kuadrat derajat semua simpul dalam struktur molekul. Kemudian indeks kedua didefinisikan sebagai perkalian derajat dua simpul yang bertetangga Secara matematis, indeks Zagreb didefiniskian sebagai berikut.

Definisi 1. Misalkan G adalah suatu graf, Indeks Zagreb pertama $(M_1(G))$ dan indeks Zagreb kedua $(M_2(G))$ dari graf G adalah

$$M_1(G) = \sum_{v_i \in V(G)} deg(v_i)^2$$

$$M_2(G) = \sum_{v_i v_2 \in E(G)} deg(v_1) deg(v_2)$$

dimana $deg\ (v_i)$ adalah derajat dari simpul v_i.

Indeks Gutman adalah alat penting dalam kimia yang digunakan untuk menggambarkan struktur molekuler dan memahami hubungan antara struktur tersebut dengan sifat-sifat kimia, termasuk prediksi sifat fisik, aktivitas biologis, dan reaktivitas kimia senyawa organik. Ini berperan dalam desain obat, analisis kuantitatif struktur-sifat, dan pemahaman lebih dalam tentang struktur molekuler dan sifat kimia yang terkait (Mazorodze et al., 2016). Indeks Gutman didesinisikan sebagai berikut

Definisi 2. Misalkan G adalah suatu graf terhubung, indeks Gutman dari graf G didefinisikan dengan

$$Gut(G) = \sum_{i<j} deg(v_i)\, deg\ (v_j) d(v_i, v_j)$$

dimana $d(v_i, v_j)$ adalah jarak antara simpul v_i dan v_j, dan $deg\ (v_i)$ adalah derajat simpul v_i.

Indeks Wiener dinamai sesuai dengan Harry Wiener, yang memperkenalkannya pada tahun 1947. Ini adalah indeks topologi tertua yang terkait dengan percabangan molekul kimia. Berdasarkan kesuksesannya, banyak indeks topologi lain dari graf kimia, berdasarkan informasi dalam matriks jarak graf, telah dikembangkan setelah karya Wiener (Ren & Su, 2017).

Kuantitas yang sama juga telah dipelajari dalam matematika murni, dengan berbagai nama termasuk status bruto, jarak suatu graf, dan transmisi. Indeks Wiener juga berkaitan erat dengan sentralitas kedekatan dari sebuah simpul dalam sebuah graf, sebuah kuantitas yang berbanding terbalik dengan jumlah semua jarak antara simpul yang diberikan dan semua simpul lainnya yang telah sering digunakan dalam sosiometri dan teori jaringan sosial.

Definisi 3. Misalkan G adalah suatu graf, indeks Weiner dari graf G didefinisikan dengan

$$W(G) = \sum_{i<j} d(v_i, v_j)$$

dimana $d(v_i, v_j)$ adalah jarak antara simpul v_i dan v_j.

Dalam CGT, indeks hyper-Wiener atau bilangan hyper-Wiener adalah indeks topologis dari molekul yang digunakan dalam biokimia. Indeks Hyper-Wiener juga dapat digunakan untuk representasi jaringan komputer dan meningkatkan keamanan perangkat keras. Indeks Hyper-Wiener juga digunakan untuk membatasi struktur sebuah partikel ke dalam sebuah angka tunggal yang mencerminkan perpanjangan molekuler dan struktur elektroniknya. Indeks hyper-Wiener adalah generalisasi yang diperkenalkan oleh Milan Randić dari konsep indeks Wiener (Feng et al., 2014). Indeks Hyper Wiener didefinisikan Sebagai berikut:

Definisi 4. Misalkan G adalah suatu graf, indeks hyper-Weiner dari graf G didefinisikan dengan

$$WW(G) = \sum_{i<j} \left(d\left(v_i, v_j\right) + d\left(v_i, v_j\right)^2 \right)$$

dimana $d(v_i, v_j)$ adalah jarak antara simpul v_i dan v_j.

Dalam Chemical Topological graph, indeks Estrada adalah indeks topologi lipatan protein. Indeks ini pertama kali didefinisikan oleh Ernesto Estrada sebagai ukuran derajat lipatan suatu protein, yang direpresentasikan sebagai graf jalur yang diberi bobot oleh sudut dihedralkan atau torsional dari tulang belakang protein. Indeks derajat lipatan ini telah ditemukan memiliki berbagai aplikasi dalam studi fungsi protein dan interaksi protein-ligand (Zhou, 2008). Secara matematis, indeks Estrada didefinisikan sebagai

Definisi 5. Misalkan G adalah suatu graf dengan jumlah simpul n dan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks ketetanggaan A_G. Indeks Estrada ($EE(G)$) dari graf G adalah

$$EE(G) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}$$

Indeks Randić adalah alat penting dalam kimia yang digunakan untuk menganalisis dan menggambarkan struktur molekuler senyawa organik. Dengan bantuan indeks ini, ilmuwan dapat memprediksi sifat fisik, aktivitas biologis, dan reaktivitas kimia senyawa, serta memahami hubungan antara struktur molekuler dan sifat-sifat kimia. Ini memiliki berbagai aplikasi dalam perancangan obat, analisis struktur-sifat, dan studi struktur molekuler dalam berbagai bidang kimia (Roslly et al., 2023). Indeks Randic didefiniskan sebagai berikut

Definisi 6. Misalkan G adalah suatu graf, indeks Weiner dari graf G didefinisikan dengan

$$\mathrm{R(G)}=\sum_{\mathrm{i<j}}\left(\mathrm{deg(v_i)\ deg\ (v_j)}\right)^{1/2}$$

dimana $deg\ (v_i)$ adalah derajat simpul v_i.

Dalam Chemical Topological graph, indeks Szeged adalah indeks topologi suatu molekul yang digunakan dalam biokimia. Indeks Szeged, yang diperkenalkan oleh Iván Gutman, menggeneralisasi konsep indeks Wiener yang diperkenalkan oleh Harry Wiener. Indeks Szeged telah ditunjukkan memiliki korelasi yang baik dengan berbagai sifat biologis dan fisikokimia (Alimon et al., 2020). Indeks Szeged dari sebuah graf terhubung didefinisikan sebagai

Definisi 7. Misalkan G adalah suatu graf terhubung, indeks Szeged dari graf G didefinisikan sebagai

$$Sz(G) = \sum_{e=uv\epsilon E} n_u(e|G)\ n_v(e|G)$$

dimana e merupakan sisi di G yang menghubungkan u dan v, kemudian $n_u(e|G)$ menyatakan banyak titik G yang terletak lebih dekat dengan u dibandingkan dengan v.

Dalam Chemical Topological graph, indeks Padmakar–Ivan (PI) adalah indeks topologi suatu molekul yang digunakan dalam biokimia. Indeks Padmakar–Ivan merupakan generalisasi yang diperkenalkan oleh Padmakar V. Khadikar dan Iván Gutman dari konsep indeks Wiener yang diperkenalkan oleh Harry Wiener. Indeks PI sangat penting dalam studi hubungan struktur-aktivitas kuantitatif untuk model klasifikasi yang digunakan dalam ilmu kimia, biologi, rekayasa, dan nanoteknologi (Pattabiraman & Paulraja, 2012). Indeks PI dari suatu graf G didefinisikan sebagai

Definisi 8. Misalkan G adalah suatu graf terhubung, indeks Padmakar-Ivan dari graf G didefinisikan sebagai

$$PI(G) = \sum_{e=uv\epsilon E} (n_u(e|G) + n_v(e|G))$$

dimana e merupakan sisi di G yang menghubungkan u dan v, kemudian $n_u(e|G)$ menyatakan banyak titik G yang terletak lebih dekat dengan u dibandingkan dengan v.

Indeks Harmonic, juga dikenal sebagai Bilangan Harmonic Topologis, diperkenalkan oleh Ilja Prisner pada tahun 1983 sebagai indeks topologis dalam kimia teoretis. Konsepnya didasarkan pada fungsi Harmonik dalam teori medan elektrostatik, yang digunakan untuk menggambarkan potensial elektrostatik dalam molekul. Indeks Harmonic digunakan untuk memprediksi berbagai sifat fisik dan kimia senyawa organik, seperti kelarutan, titik didih, dan titik leleh. Seiring waktu, indeks ini telah menjadi alat penting dalam komputasi kimia, digunakan dalam perancangan obat, analisis kuantitatif struktur-sifat, dan penelitian struktur molekuler, dengan pengembangan dan pemahaman lebih lanjut yang terus berlanjut (Zhong, 2012). Indesk Harmonic didefinisikan sebagai berikut

Definisi 9. Misalkan G adalah suatu graf, indeks Harmonic dari graf G didefinisikan dengan

$$\mathrm{R(G)}=\sum_{\mathrm{v_i v_j \in E(G)}} \frac{2}{\left(\mathrm{deg(v_i)} + \mathrm{deg\ (v_j)}\right)}$$

dimana $deg\ (v_i)$ adalah derajat simpul v_i.

Indeks topologi ini dapat menjadi ukuran numerik terkait hubungan antar simpul pada graf pada berbagai graf. Representasi graf bervariasi dari graf koprima sampai graf koprima relatif (Syarifudin et al., 2023), graf irisan (Ramdani et al., 2022), graf pangkat (Asmarani et al., 2021), graf nilpoten (Malik et al., 2023), graf prima (Maulana et al., 2023) hingga graf pembagi nol (Semil @ Ismail et al., 2023).

Formulasi Pada Representasi Graf Koprima

Graf koprima atas suatu grup adalah topik yang sering menjadi fokus penelitian, salah satunya adalah pada grup bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_n$ yang dipelajari oleh Juliana (Juliana et al., 2020). Dalam konteks ini, graf tersebut selalu memiliki struktur multi-partit, yang menjadi salah satu ciri utama dalam analisisnya. Hasilnya diberikan pada Teorema berikut:

Teorema 1. Misalkan $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}$, dengan $p_1, p_2, \cdots, p_j$ bilangan prima berbeda dan $k_1, k_2, \cdots, k_j$ adalah bilangan asli, maka graf koprima dari $\mathbb{Z}_n$ adalah graf $(j + 1)-$partit.

Penelitian tentang graf koprima pada grup yang berbeda telah dilakukan oleh Syarifudin, khususnya dalam konteks graf koprima pada grup dihedral D_{2n} (Syarifudin et al., 2021). Hasil penelitiannya dipersembahkan dalam bentuk Teorema berikut ini:

Teorema 2. Misalkan $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}$, dengan $p_1, p_2, \cdots, p_j$ bilangan prima ganjil berbeda dan $k_1, k_2, \cdots, k_j$ adalah bilangan asli, maka graf koprima dari D_{2n} adalah graf $(j + 2)-$partit.

Berdasarkan temuan dari dua penelitian terkait bentuk graf koprima di atas, Yatin menyajikan indeks Hyper-Wiener dan indeks Padmakar-Ivan (Zainun Yatin et al., 2023). Hasilnya diberikan pada teorema-teorema berikut

Teorema 3. Misalkan G graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = 2^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka indeks Hyper-Wiener dari graf koprima dari grup dihedral adalah

$$WW(G) = 6n^2 - 7n + 2$$

Teorema 4. Misalkan G graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = 2^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka indeks Hyper-Wiener dari graf koprima dari grup dihedral adalah

$$PI(G) = 4n^2 - 6n + 2$$

Pada sisi lain, Gayatri berhasil menemukan indeks Harary, indeks Harmonikindeks Zagreb, indeks Gutman, dan indeks Wiener dari graf koprima yang terkait dengan grup dihedral (Gayatri et al., 2023).

Teorema 5. Misalkan G graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Harary graf adalah

$$Ha(G) = 3n^2 - 5n + 4$$

Teorema 6. Misalkan G graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Harmonik graf adalah

$$H(G) = \frac{2n-2}{3n} + \frac{2n}{3n-1} + \frac{2n^2-2n}{2n+1}$$

Teorema 7. Misalkan G graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Zagreb pertama graf adalah

$$M_1(G) = n(2n^2 + 5n - 5)$$

Teorema 8. Misalkan G graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Gutman pertama graf adalah

$$Gut(G) = 3n^4 - 4n^3 + 8n^2 - 11n + 3$$

Teorema 9. Misalkan G graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Wiener graf adalah

$$W(G) = \frac{3n^2 + 5n - 5}{2}$$

Husni sebelumnya telah memberikan dua indeks topologi, yakni indeks Harmonic dan indeks Gutman. Formulasi ini berbeda dengan yang diberikan oleh Gayatri, perbedaan utama adalah dari grup yang digunakan (Husni et al., 2022).

Teorema 10. Misalkan G graf koprima dari grup bilangan bulat modulo. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Harmoic dari grup adalah

$$H(G) = \frac{2n-2}{n}$$

Teorema 11. Misalkan G graf graf koprima dari grup bilangan bulat modulo. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Gutman dari grup adalah

$$Gut(G) = (n-1)(2n-3)$$

Selain itu juga banyak studi terkait graf koprima pada grup quaternion yang diperumum berupa karakteristik dan bentuk grafnya (Nurhabibah et al., 2021), hingga pada numerical invariannya (Nurhabibah et al., 2023). Yang menarik, graf koprima punya dual yang dinamakan graf non-koprima yang memiliki karakteristik berkebalikan (Nurhabibah et al., 2022).

Formulasi Pada Representasi Graf Pangkat

Graf pangkat pada grup menggambarkan hubungan pangkat antara elemen-elemen grup, membantu memahami sifat struktural grup, dan berguna dalam matematika, seperti teori bilangan dan kriptografi. Syechah berhasil mendapatkan representasi graf pangkat untuk grup bilangan bulat modulo berorde prima yang disempurnakan oleh Putra pada orde perpangkatan prima (Syechah et al., 2022).

Teorema 12. Misalkan G graf pangkat dari grup bilangan bulat module. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka G adalah graf lengkap K_n.

Putra kemudian mwmberikan formulasi indeks topologi pada graf pangkat untuk grup bilangan bulat modulo (Putra et al., 2023).

Teorema 13. Misalkan G graf graf koprima dari grup bilangan bulat modulo. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Zagreb pertama dan kedua dari graf adalah

$$M_1(G) = n(n-1)^2$$

$$M_2(G) = \frac{n}{2}(n-1)^3$$

Teorema 14. Misalkan G graf graf koprima dari grup bilangan bulat modulo. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Gutman dari graf adalah

$$Gut(G) = \frac{n}{2}(n-1)^3$$

Teorema 15. Misalkan G graf graf koprima dari grup bilangan bulat modulo. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Wiener dari graf adalah

$$W(G) = \frac{n(n-1)}{4}$$

Asmarani sebelumnya telah berhasil memformulasikan indeks topologi pada grup yang berbeda, yakni grup dihedral (Asmarani et al., 2023).

Teorema 16. Misalkan G graf graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Wiener dari graf adalah

$$W(G) = \frac{7n^2 - 5n}{2}$$

Teorema 17. Misalkan G graf graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Zagreb pertama dari graf adalah

$$M_1(G) = n^2(n-1)$$

Teorema 18. Misalkan G graf graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Gutman dari graf adalah

$$Gut(G) = \frac{(n^4 + n) + 3(n^3 - n^2)}{2}$$

4. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini, dua jenis graf, yaitu graf koprima dan graf pangkat, telah diformulasikan dalam berbagai konteks grup matematis. Graf koprima pada grup bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_n$ dan grup dihedral D_{2n} memiliki struktur multi-partit, dan rumus-rumus indeks topologi seperti Hyper-Wiener, Padmakar-Ivan, Harary, Harmonik, Zagreb, Gutman, dan Wiener telah berhasil dirumuskan untuk graf-graf ini. Temuan ini memberikan wawasan dalam memahami sifat-sifat struktural grup dan aplikasi dalam teori bilangan, kriptografi, dan teori jaringan. Selain itu, dalam konteks graf pangkat, formulasi indeks topologi juga telah dikembangkan, terutama pada grup bilangan bulat modulo dan grup bilangan bulat modulo berorde prima. Hasil penelitian ini memiliki implikasi dalam analisis sifat-sifat pangkat dan hubungan antara elemen-elemen grup. Keseluruhan, penelitian ini membantu memperluas pemahaman tentang graf-graf tersebut dan kontribusi mereka dalam berbagai bidang matematika.

5. DAFTAR REFERENSI

1. Alimon, N. I., Sarmin, N. H., & Erfanian, A. (2020). The Szeged and Wiener indices for coprime graph of dihedral groups. AIP Conference Proceedings, 2266. https://doi.org/10.1063/5.0018270
2. Asmarani, E. Y., Lestari, S. T., Purnamasari, D., Syarifudin, A. G., Salwa, S., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). The First Zagreb Index, The Wiener Index, and The Gutman Index of The Power of Dihedral Group. CAUCHY: Jurnal Matematika Murni Dan Aplikasi, 7(4), 513–520. https://doi.org/10.18860/ca.v7i4.16991
3. Asmarani, E. Y., Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2021). The Power Graph of a Dihedral Group. Eigen Mathematics Journal, 4(2), 80–85. https://doi.org/10.29303/emj.v4i2.117
4. Feng, L., Liu, W., Yu, G., & Li, S. (2014). The hyper-Wiener index of graphs with given bipartition. Utilitas Mathematica, 96(1), 99–108. https://www.researchgate.net/publication/279652481
5. Gayatri, M. R., Fadhilah, R., Lestari, S. T., Pratiwi, L. F., Abdurahim, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). TOPOLOGY INDEX OF THE COPRIME GRAPH FOR DIHEDRAL GROUP OF PRIME POWER ORDER. Jurnal Diferensial, 5(2), 126–134. https://doi.org/10.35508/jd.v5i2.12462
6. Hua, H., Das, K. C., & Wang, H. (2019). On atom-bond connectivity index of graphs. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 479(1), 1099–1114. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.06.069
7. Husni, M. N., Syafitri, H., Siboro, A. M., Syarifudin, A. G., Aini, Q., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). THE HARMONIC INDEX AND THE GUTMAN INDEX OF COPRIME GRAPH OF INTEGER GROUP MODULO WITH ORDER OF PRIME POWER. BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan, 16(3), 961–966. https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss3pp961-966
8. Juliana, R., Masriani, M., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Irwansyah, I. (2020). COPRIME GRAPH OF INTEGERS MODULO n GROUP AND ITS SUBGROUPS. Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA), 3(1), 15–18. https://doi.org/10.14710/jfma.v3i1.7412
9. Malik, D. P., Wardhana, I. G. A. W., Dewi, P. K., Widiastuti, R. S., Maulana, F., Syarifudin, A. G., & Awanis, Z. Y. (2023). Graf Nilpoten dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima (A Note on Nilpotent Graph of Ring Integer Modulo with Order Prime Power). JMPM: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika, 8(1), 28–33. https://doi.org/10.26594/jmpm.v8i1.2920
10. Mansour, T., A. Rostami, M., Suresh, E., & B. A. Xavier, G. (2016). On the Bounds of the First Reformulated Zagreb Index. Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 4(1), 8–15. https://doi.org/10.12691/tjant-4-1-2
11. Maulana, M., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & @ Ismail, G. S. (2023). Some Characteristics of the Prime Graph of Integer Modulo Groups. InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics, 5(1), 38–46. https://doi.org/10.15408/inprime.v5i1.29014
12. Mazorodze, J. P., Mukwembi, S., & Vetrík, T. (2016). The Gutman index and the edge-Wiener index of graphs with given vertex-connectivity. Discussiones Mathematicae - Graph Theory, 36(4), 867–876. https://doi.org/10.7151/dmgt.1900
13. Nurhabibah, Malik, D. P., Syafitri, H., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). Some results of the non-coprime graph of a generalized quaternion group for some n. AIP Conference Proceedings, 2641(December 2022), 020001. https://doi.org/10.1063/5.0114975
14. Nurhabibah, N., Syarifudin, A. G., & Wardhana, I. G. A. W. (2021). Some Results of The Coprime Graph of a Generalized Quaternion Group Q_4n. InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics, 3(1), 29–33. https://doi.org/10.15408/inprime.v3i1.19670
15. Nurhabibah, N., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2023). NUMERICAL INVARIANTS OF COPRIME GRAPH OF A GENERALIZED QUATERNION GROUP. Journal of the Indonesian Mathematical Society, 29(01), 36–44.

16. Pattabiraman, K., & Paulraja, P. (2012). Vertex and edge Padmakar-Ivan indices of the generalized hierarchical product of graphs. Discrete Applied Mathematics, 160(9), 1376–1384. https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.01.021
17. Putra, L. R. W., Awanis, Z. Y., Salwa, S., Aini, Q., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). THE POWER GRAPH REPRESENTATION FOR INTEGER MODULO GROUP WITH POWER PRIME ORDER. BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan, 17(3), 1393–1400. https://doi.org/10.30598/barekengvol17iss3pp1393-1400
18. Ramdani, D. S., Wardhana, I. G. A. W., & Awanis, Z. Y. (2022). THE INTERSECTION GRAPH REPRESENTATION OF A DIHEDRAL GROUP WITH PRIME ORDER AND ITS NUMERICAL INVARIANTS. BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan, 16(3), 1013–1020. https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss3pp1013-1020
19. Ren, H., & Su, X. (2017). The Annealed Entropy of Wiener Number on Random Double Hexagonal Chains. Applied Mathematics, 08(10), 1473–1480. https://doi.org/10.4236/am.2017.810108
20. Roslly, S. R. D., Ab Halem, N. F. A. Z., Zailani, N. S. S., Alimon, N. I., & Mohammad, S. A. (2023). Generalization of Randic´ Index of the Non-commuting Graph for Some Finite Groups. Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences, 19(5), 762–768. https://doi.org/10.11113/mjfas.v19n5.3047
21. Semil @ Ismail, G., Sarmin, N. H., Alimon, N. I., & Maulana, F. (2023). The First Zagreb Index of the Zero Divisor Graph for the Ring of Integers Modulo Power of Primes. Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences, 19(5), 892–900. https://doi.org/10.11113/mjfas.v19n5.2980
22. Syarifudin, A. G., Nurhabibah, Malik, D. P., & dan Wardhana, I. G. A. W. (2021). Some characterizatsion of coprime graph of dihedral group D2n. Journal of Physics: Conference Series, 1722(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1722/1/012051
23. Syarifudin, A. G., Santi, L. M., Faradiyah, A. R., Wijaya, V. R., & Suwastika, E. (2023). Topological Indices of the Relative Coprime Graph of the Dihedral Group. JTAM (Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika), 7(3), 698. https://doi.org/10.31764/jtam.v7i3.14913
24. Syechah, B. N., Asmarani, E. Y., Syarifudin, A. G., Anggraeni, D. P., & Wardhana, I. G. A. W. W. (2022). Representasi Graf Pangkat Pada Grup Bilangan Bulat Modulo Berorde BilanganPrima. Evolusi: Journal of Mathematics and Sciences, 6(2), 99–104.
25. Wagner, S., & Wang, H. (2019). Introduction to Chemical Graph Theory. A Chapman & Hall Group. https://www.crcpress.com/Discrete-Mathematics-and-Its-Applications/book-series/
26. Zainun Yatin, B., Gayatri, M. R., Wardhana, I. G. A. W., & Prayanti, B. D. (2023). INDEKS HYPER-WIENER DAN INDEKS PADMAKAR-IVAN DARI GRAF KOPRIMA DARI GRUP DIHEDRAL. Jurnal Riset Dan Aplikasi Matematika, 07(02), 138–147.
27. Zhong, L. (2012). The harmonic index for graphs. Applied Mathematics Letters, 25(3), 561–566. https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.09.059
28. Zhou, B. (2008). On Estrada index. MATCH Commun. Math. Comput. Chem, 60(1), 485–492. https://www.researchgate.net/publication/265353359