EKSPLORASI INDEKS SOMBOR PADA GRAF MOLEKULER BERBASIS GRUP HINGGA

Gusti Yogananda Karang, Abdurahim*, Syaftirridho Putri,
Fathul Maulina Wahidah, Ayes Malona Siboro
Program Studi Matematika, Universitas Mataram

Corresponding Author Email:* abdurahim@staf.unram.ac.id

ABTSRAK.
Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji dan mengembangkan rumus umum dari Sombor index dalam konteks graf molekuler yang terkait dengan grup hingga. Studi ini diawali dengan kajian literatur mendalam mengenai teori graf, Sombor index, serta aplikasinya dalam kimia matematika dan grup hingga. Grup hingga yang dipilih untuk dianalisis didasarkan pada kriteria kompleksitas struktur dan relevansi topologis. Setiap grup hingga dipetakan menjadi graf molekuler, dengan elemen grup direpresentasikan sebagai simpul dan operasi grup sebagai sisi graf. Sombor index kemudian dihitung menggunakan rumus yang ada serta perangkat lunak matematika untuk memfasilitasi perhitungan yang lebih kompleks. Hasil perhitungan ini digunakan untuk mengembangkan rumus umum Sombor index untuk graf molekuler pada grup hingga, diikuti dengan analisis pola dan keterkaitannya dengan struktur grup. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi baru dalam memahami hubungan antara Sombor index dan struktur topologis grup hingga.

Keyword: indeks Gutman, grup hingga, graf molekuler

1. PENDAHULUAN

Indeks Sombor adalah sebuah invarian numerik yang telah dipelajari di berbagai bidang, termasuk teori grup hingga dan *Chemical Graph Theory* (Malik, et. al, 2024), karena kemampuannya untuk mengukur kompleksitas dan informasi struktural. Dinamai dari kota Sombor di Serbia, indeks ini awalnya diperkenalkan untuk menganalisis grup hingga dengan menangkap rincian struktur internalnya. Salah satu sifat menarik dari indeks Sombor adalah hubungannya yang erat dengan tabel karakter dari grup G, yang berisi informasi penting tentang representasi tak tereduksi dari grup tersebut (Ningrum, et. al., 2024). Hubungan ini memungkinkan indeks Sombor untuk dinyatakan dalam nilai karakter, memberikan wawasan tentang simetri dan sifat struktural dari grup tersebut. Dalam beberapa tahun terakhir, indeks Sombor semakin menarik perhatian karena potensi aplikasinya dalam kombinatorika, teori graf, dan teori bilangan, dengan penelitian yang mengeksplorasi perilakunya dalam operasi grup, hubungannya dengan invarian lain, dan aplikasinya dalam masalah klasifikasi dalam studi grup hingga (Putra, et. al., 2024).

Selain aplikasinya dalam matematika, indeks Sombor memiliki potensi signifikan dalam kimia, khususnya dalam *Chemical Graph Theory*. Dalam konteks ini, struktur molekul direpresentasikan sebagai graf di mana simpul mewakili atom dan sisi mewakili ikatan kimia (Satriawan, et. al., 2024). Indeks Sombor, yang dihitung berdasarkan derajat simpul dalam graf molekul ini, mengukur kompleksitas molekul, membantu ahli kimia membedakan molekul berdasarkan variasi strukturalnya. Indeks ini sangat berguna dalam model *Quantitative Structure-Activity Relationship (QSAR)* dan *Quantitative Structure-Property Relationship (QSPR)*, yang menghubungkan struktur molekul dengan sifat kimia dan biologi seperti stabilitas, titik didih, dan reaktivitas. Indeks ini juga membantu membedakan antara isomer—senyawa dengan rumus molekul yang sama tetapi struktur yang berbeda—dengan menangkap nuansa struktural yang memengaruhi perilaku kimia (Hua, et. al, 2019).

Dengan demikian, indeks Sombor telah muncul sebagai alat serbaguna di berbagai disiplin ilmu, memfasilitasi klasifikasi, prediksi, dan analisis struktural baik dalam konteks matematika maupun kimia. Aplikasinya menunjukkan utilitas luas indeks ini dalam memahami struktur dan hubungan kompleks, yang menegaskan relevansinya baik dalam teori grup maupun kimia.

2. METODE

Penelitian ini dimulai dengan kajian literatur mengenai teori graf, Sombor index, serta aplikasinya dalam kimia matematika dan grup hingga, mencakup artikel ilmiah, buku, dan publikasi terbaru. Grup hingga yang akan dianalisis dipilih berdasarkan kompleksitas dan relevansi strukturalnya. Untuk setiap grup terpilih, graf dibangun dengan elemen grup sebagai simpul dan relasi sebagai sisi, lalu Sombor index dihitung menggunakan derajat simpul dalam graf tersebut, dengan bantuan perangkat lunak matematika untuk perhitungan kompleks. Dari hasil perhitungan, dikembangkan rumus umum Sombor index yang mencerminkan pola dan hubungan dengan struktur grup, memperlihatkan karakteristik struktural dan potensi aplikasi dalam klasifikasi grup hingga.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini dimulai dengan kajian literatur mendalam mengenai teori graf, indeks Sombor dan perumumannya, serta aplikasinya dalam *Chemical Topological Graph* dan grup hingga, dengan merujuk pada artikel ilmiah, buku, dan publikasi terkini. Grup hingga yang akan dianalisis dipilih berdasarkan kriteria seperti kompleksitas struktural dan signifikansi topologisnya. Pada setiap grup yang terpilih, graf dibentuk dengan merepresentasikan elemen-elemen grup sebagai simpul dan hubungan antar elemen sebagai sisi graf. Indeks Sombor kemudian dihitung berdasarkan derajat simpul dalam graf yang dihasilkan, menggunakan perangkat lunak matematika untuk mendukung perhitungan kompleks. Hasil perhitungan ini digunakan untuk menyusun rumus umum indeks Sombor dan perumumannya, yang dapat menunjukkan pola dan keterkaitan dengan struktur internal grup hingga, sekaligus memperlihatkan potensi aplikasinya dalam klasifikasi grup hingga dan analisis struktural lebih lanjut..

Definisi 1. (Cruz, et al., 2021) Untuk graf sederhana G, Indeks Sombor dari G didefinisikan sebagai berikut:

$$SO(G) = \sum_{u,v\in E(G)} \sqrt{d_u^2 + d_v^2}$$

dengan d_u, d_v adalah derajat dari u dan v, pada graf G.

Selain indeks Sombor, terdapat juga bentuk umum lainnya yang disebut indeks Sombor tereduksi dan indeks Sombor rata-rata, yang masing-masing didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2. (Cruz, et al., 2021) Untuk graf sederhana G, Indeks Sombor tereduksi dari G didefinisikan sebagai berikut:

$$SO_{red}(G) = \sum_{u,v\in E(G)} \sqrt{(d_u - 1)^2 + (d_v - 1)^2}$$

dengan d_u, d_v adalah derajat dari u dan v, pada graf G.

Definisi 3. (Cruz, et al., 2021) Untuk graf sederhana G, Indeks Sombor rata-rata dari G didefinisikan sebagai berikut:

$$SO_{red}(G) = \sum_{u,v \in E(G)} \sqrt{\left(d_u - \frac{2m}{n}\right)^2 + \left(d_v - \frac{2m}{n}\right)^2}$$

dengan d_u, d_v adalah derajat dari u dan v, dengan $m = |V(G)|$ dan $n = |E(G)|$.

Indeks Sombor, Indeks Sombor Tereduksi, dan Indeks Sombor Rata-rata adalah variasi dari indeks topologis matematis yang digunakan terutama dalam teori graf untuk mempelajari struktur molekul dalam kimia. Indeks Sombor standar dihitung berdasarkan jumlah akar kuadrat dari jumlah derajat simpul-simpul yang berdekatan dalam graf, yang memberikan wawasan tentang keterhubungan molekul. Indeks Sombor Tereduksi adalah versi yang disederhanakan dengan menerapkan aturan pengurangan tertentu, sehingga lebih mudah dihitung untuk graf yang lebih besar. Sebaliknya, Indeks Sombor Rata-rata menormalkan Indeks Sombor dengan jumlah sisi, memberikan nilai rata-rata per sisi, yang berguna untuk membandingkan graf dengan ukuran yang berbeda. Setiap varian melayani tujuan yang berbeda tergantung pada kebutuhan analitis dan kompleksitas struktur molekul yang dipelajari.

3.1 Indeks Sombor pada Graf Koprima untuk grup Dihedral

Grup dihedral adalah grup yang merepresentasikan simetri poligon beraturan dengan jumlah rotasi dan refleksi yang sama, sering digunakan untuk mempelajari pola simetri dalam geometri dan dalam teori grup non-abelian. Sementara itu, graf koprima adalah graf yang menghubungkan simpul bilangan bulat jika keduanya koprima atau memiliki faktor persekutuan satu. Graf ini membantu dalam analisis struktur divisibilitas serta distribusi bilangan prima dalam teori bilangan. Berikut definisi dari grup dihedral dan graf koprima.

Definisi 4. (Gazir & Wardhana, 2019) D_n adalah grup dihedral dengan orde $2n$, dengan $n \geq 3$, dan dibangkitkan oleh elemen $a, b \in G$ sehingga $G = \{a, b | a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1}\}$.

Definisi 5. (Ma et.al, 2014) Misalkan G adalah grup hingga, graf koprima dari grup G yang dinotasikan dengan Γ_G adalah graf dengan simpul yang terdiri dari semua elemen dari G, dan dua simpul a dan b terhubung dengan sisi jika $|a, b| = 1$.

Karakteristik dari indeks Sombor dari graf koprima grup dihedral diberikan sebagai berikut.

Teorema 1. (Putri et.al, 2024) Misal D_{2n} adalah grop dihedral dengan $n = p^k$, p p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$. Maka indeks Sombor dari graf koprima untuk grup ini diberikan oleh rumus:

$$SO\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = (n-1)\sqrt{(2n-1)^2 + (n-1)^2} + (n)\sqrt{(2n-1)^2 + (n)^2} + n(n-1)\sqrt{(n+1)^2 + (n)^2}$$

Bukti:

Karena grup tersebut adalah grup bipartit lengkap, grup dapat dipartisi menjadi tiga bagian: $\{e\}$, P_1, dan P_2. Himpunan P_1 terdiri dari semua elemen rotasi dan P_2 terdiri dari semua elemen refleksi. Diketahui bahwa derajat dari $\deg(e) = 2n - 1$, $\deg(x) = n + 1$ untuk semua $x \in P_1$ dan $\deg(y) = n$ untuk semua $y \in P_2$. Pembuktian dibagi menjadi tiga kasus untuk mendapatkan indeks Sombor.

Untuk kasus pertama, hubungan antara elemen identitas dan elemen rotasi dihitung terlebih dahulu.

$$SO\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = \sum_{e,P_1 \in E\,\Gamma_{(D_{2n})}} \sqrt{{d_e}^2 + {d_{P_1}}^2}$$
$$= \sum_{e,P_1 \in E\,\Gamma_{(D_{2n})}} \sqrt{(2\mathrm{n}-1)^2 + (\mathrm{n}+1)^2}$$

Karena e bertetangga dengan semua simpul P_1, dan $|P_1| = n - 1$, maka

$$SO\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = \sum_{e,P_1 \in E\,\Gamma_{(D_{2n})}} \sqrt{(2\mathrm{n}-1)^2 + (\mathrm{n}+1)^2}$$
$$= (n-1)\sqrt{(2n-1)^2 + (n+1)^2}$$

Untuk kasus kedua, hubungan antara elemen identitas dan elemen refleksi dihitung.

$$SO\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = \sum_{e,P_2 \in E\,\Gamma_{(D_{2n})}} \sqrt{{d_e}^2 + {d_{P_2}}^2}$$
$$= \sum_{e,P_2 \in E\,\Gamma_{(D_{2n})}} \sqrt{(2\mathrm{n}-1)^2 + \mathrm{n}^2}$$

Karena e bertetangga dengan semua simpul P_2, dan $|P_2| = n$, maka

$$SO\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = \sum_{e,P_2 \in E\,\Gamma_{(D_{2n})}} \sqrt{(2n-1)^2 + n^2}$$
$$= n\sqrt{(2n-1)^2 + n^2}$$

Dan terakhir, hubungan antara elemen rotasi dan elemen refleksi dihitung.

$$SO\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = \sum_{\substack{u \in P_1 \\ v \in P_2}} \sqrt{{d_u}^2 + {d_v}^2}$$
$$= \sum_{\substack{,u \in P_1 \\ v \in P_2}} \sqrt{(n+1)^2 + n^2}.$$

Karena $|P_1| = n - 1$ dan $|P_2| = n$, maka

$$SO\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = \sum_{\substack{,u \in P_1 \\ v \in P_2}} \sqrt{(n+1)^2 + n^2}$$
$$= n(n-1)\sqrt{(n+1)^2 + n^2}.$$

Berdasarkan tiga kasus di atas, secara umum, indeks Sombor dari graf koprima $\Gamma_{D_{2n}}$ diperoleh:

E-ISSN: 2774-8057
Volume 7 Januari 2025

$$SO\ (G) = (n-1)\sqrt{(2n-1)^2 + (n-1)^2} + (n)\sqrt{(2n-1)^2 + (n)^2}$$
$$+ n(n-1)\sqrt{(n+1)^2 + (n)^2}. \blacksquare$$

Demikian pula, kami juga berhasil menemukan rumus umum untuk indeks Sombor tereduksi.

Teorema 2. (Putri et.al, 2024) Misal D_{2n} adalah grop dihedral dengan $n = p^k$, p p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$. Maka indeks Sombor tereduksi dari graf koprima untuk grup ini diberikan oleh rumus:

$$SO_{red}\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = (n-1)\sqrt{(2n-2)^2 + n^2} + (n)\sqrt{(2n-2)^2 + (n-1)^2}$$
$$+\ n(n-1)\sqrt{n^2 + (n+1)^2}.$$

Bukti:
Dengan prinsip yang sama seperti bukti Teorema 1, diperoleh rumus umum indeks Sombor tereduksi diperoleh

$$SO_{red}\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = (n-1)\sqrt{(2n-2)^2 + n^2} + n\sqrt{(2n-2)^2 + (n-1)^2}$$
$$+n(n-1)\sqrt{n^2 + (n-1)^2}. \blacksquare$$

Teorema 3. (Putri et.al, 2024) Misal D_{2n} adalah grop dihedral dengan $n = p^k$, p p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$. Maka indeks Sombor rata-rata dari graf koprima untuk grup ini diberikan oleh rumus:

$$SO_{avr}\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = (n-1)\sqrt{\left(2n-1-\frac{2m}{n}\right)^2 + \left(\mathrm{n}+1-\frac{2m}{n}\right)^2}$$
$$+ n\sqrt{\left(2n-1-\frac{2m}{n}\right)^2 + (n-\frac{2m}{n})^2}$$
$$+n(n-1)\sqrt{\left(\mathrm{n}+1-\frac{2m}{n}\right)^2 + \left(\mathrm{n}-\frac{2m}{n}\right)^2}.$$

Bukti:
Dengan prinsip yang sama seperti bukti Teorema 1, diperoleh rumus umum indeks Sombor tereduksi diperoleh

$$SO_{avr}\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = (n-1)\sqrt{\left(2n-1-\frac{2m}{n}\right)^2 + \left(\mathrm{n}+1-\frac{2m}{n}\right)^2}$$
$$+ n\sqrt{\left(2n-1-\frac{2m}{n}\right)^2 + (n-\frac{2m}{n})^2}$$
$$+n(n-1)\sqrt{\left(\mathrm{n}+1-\frac{2m}{n}\right)^2 + \left(\mathrm{n}-\frac{2m}{n}\right)^2}. \blacksquare$$

3.2 Indeks Sombor dari graf nilpoten grup bilangan bulat modulo n.

Graf nilpoten dari grup bilangan bulat modulo adalah representasi yang menggambarkan struktur dan sifat khusus dari grup tersebut, di mana dua elemen grup saling bertetangga jika perkalian keduanya menghasilkan elemen nilpoten.

Definisi 6. (Malik, et. al,, 2023) Suatu elemen x dari suatu gelanggang R dikatakan elemen nipolten apabila $x^r = e$ untuk suatu $r \in \mathbb{N}$. Himpunan semua unsur nilpoten dari gelanggang R dinotasikan dengan $N(R)$.
Definisi 7. (Malik, et. al,, 2023) Graf nilpoten dari gelanggang R, dinotasikan dengan Γ_R, adalah graf dengan himpunan simpul semua unsur R dan dua simpul u dan v bertetangga apabila $uv \in N(R)$.
Karakteristik dari indeks Sombor dari graf nilpoten gelanggang bilangan bulat modulo diberikan sebagai berikut.
Teorema 4. (Wahidah et.al, 2024) Misalkan Γ_{Z_n} adalah graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo n. Jika $n = 2^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka

$$SO\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = (2^{2k-2})\sqrt{2^{2k-2} + (2^k - 1)^2} + \sqrt{2}(2^{k-1})(2^k - 2))(2^k - 1).$$

Bukti:
Diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ dengan $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$. Partisi graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ menjadi dua subhimpunan partisi: $V_1 = \{1, 3, 5, \dots, 2^k - 1\}, V_2 = \{0, 2, 4, \dots, 2^k - 2\}$. Catat bahwa, V_1 memuat semua unsur non-nilpoten, dan V_2 memuat semua unsur nilpotent elements dan membentuk subgraf lengkap (Malik et. al., 2024). Karena semua unsur non-nilpoten bertetangga dengan unsur nilpoten, didapatkan $deg(u) = \frac{n}{2}, u \in V_1$. Dan karena semua unsur nilpoten bertetangga dengan semua unsur lainnya, didapatkan $deg(v) = n - 1, v \in V_2$. Pembuktian dibagi menjadi dua kasus

Kasus pertama, pandang sisi uv dimana $u \in V_1$ dan $v \in V_2$. Karena $|V_1| = |V_2| = \frac{n}{2}$, maka diperoleh $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ sisi pada kasus ini. Diperoleh

$$\begin{aligned} SO\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) &= \left(\frac{n}{2}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + (n-1)^2} \\ &= (2^{2k-2})\sqrt{2^{2k-2} + (2^k - 1)^2}. \end{aligned}$$

Kasus kedua, pandang sisi uv dimana $u, v \in V_2$. Karena $|V_2| = \frac{n}{2}$ dan semua unsur di V_2 bertetangga dengan semua unsur lainnya, didapatkan $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi pada kasus ini. Diperoleh:

$$\begin{aligned} SO(G) &= \left(\frac{n(n-2)}{2}\right)\sqrt{(n-1)^2 + (n-1)^2} \\ &= \left(\frac{n(n-2)}{2}\right)(n-1)\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}(2^{k-1})(2^k - 2))(2^k - 1). \end{aligned}$$

Jadi, berdasarkan kedua kasus, rumus umum indeks Sombor dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ diberikan oleh:

$$SO\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = (2^{2k-2})\sqrt{2^{2k-2} + (2^k - 1)^2} + \sqrt{2}(2^{k-1})(2^k - 2))(2^k - 1). \blacksquare$$

Teorema 5. (Wahidah et.al, 2024) Misalkan Γ_{Z_n} adalah graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo n. Jika $n = 2^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka

$$SO_{red}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \sqrt{5}(2^{2k-3})(2^k - 2) + \sqrt{2}(2^{k-1})(2^k - 2)^2.$$

Bukti:
Pembuktian analaog dengan bukti Teorema 4 ■

Teorema 6. (Wahidah et.al, 2024) Misalkan Γ_{Z_n} adalah graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo n. Jika $n = 2^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka

$$SO_{avr}(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{2^{2k}}{16}\sqrt{2^{2k+1} - 2^{k+4} + 2^3} + \frac{\sqrt{2}}{4}(2^{k-1})(2^k - 2)^2.$$

Bukti:
Pembuktian analaog dengan bukti Teorema 4 ■

3.3 Indeks Sombor pada Graf Koprima untuk grup Quaternion yang diperumum.
Grup kuaternion adalah grup yang terdiri dari empat elemen yang berhubungan dengan rotasi dan simetri, dengan operasi perkalian yang tidak komutatif. Grup ini memiliki aplikasi penting dalam geometri dan fisika, terutama untuk menggambarkan rotasi dalam ruang tiga dimensi. Grup kuaternion yang diperumum merujuk pada perluasan grup ini untuk mencakup elemen tambahan, dan sering digunakan dalam teori grup, mekanika kuantum, serta dalam aplikasi lain seperti robotika dan grafika komputer untuk memodelkan rotasi dan simetri lebih kompleks.
Definisi 8. (Nurhabibah et.al, 2023) The generalized quaternion group (Q_{4n}) with $n \geq 2$ is a group of order $4n$ formed by elements a, b which are denoted by

$$\langle a, b \mid a^{2n} = e, b^4 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

Karakteristik dari indeks Sombor dari graf koprima untuk grup Quternion yang diperumum diberikan sebagai berikut
Teorema 7. (Siboro et.al, 2024) Misalkan Q_{4n} grup Quternion yang diperumum, dengan $n = p^k$ dengan p bilangan prima dan k bilangan bulat positif. Maka rumus umum indeks Sombor diberikan

$$SO(\Gamma_{Q_{4n}}) = (4n - 1)\sqrt{16n^2 - 8n + 2}$$

Bukti:
Karena grafnya adalah graf bintang dengan pusat e (Nurhabibah et. al., 2023), diperoleh $deg\ (e) = 4n - 1$ dan $deg\ (x) = 1\ \forall x \in V(G), x \neq e$

$$\begin{aligned} SO(\Gamma_{Q_{4n}}) &= \sum_{\{u,v\} \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} \\ &= \sqrt{(4n-1)^2 + (1)^2} + \cdots + \sqrt{(4n-1)^2 + (1)^2} \\ &= (4n-1)\sqrt{((4n-1)\verb|^|2 + (1)\verb|^|2\ )} \\ &= (4n-1)\sqrt{16n^2 - 8n + 1 + 1} \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 8. (Siboro et.al, 2024) Misalkan Q_{4n} grup Quternion yang diperumum, dengan $n = p^k$ dengan p bilangan prima dan k bilangan bulat positif. Maka rumus umum indeks Sombor tereduksi diberikan oleh

$$SO_{red}(\Gamma_{Q_{4n}}) = (4n - 1)\sqrt{16n^2 - 16n + 4}$$

Bukti:
Karena grafnya adalah graf bintang dengan pusat e (Nurhabibah et. al., 2023), diperoleh $deg\ (e) = 4n - 1$ dan $deg\ (x) = 1\ \forall x \in\ V(G), x \neq e$

$$SO_{red}\left(\Gamma_{Q_{4n}}\right) = \sum_{\{u,v\}\in E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right)} \sqrt{(\deg(u)-1)^2 + (\deg(v)-1)^2}$$
$$= (4n-1)\sqrt{((4n-1)-1)^2 + (1-1)^2}$$
$$= (4n-1)\sqrt{(4n-2)^2 + 0}$$
$$= (4n-1)\sqrt{16n^2 - 16n + 4}\blacksquare$$

Teorema 9. (Siboro et.al, 2024) Misalkan Q_{4n} grup Quternion yang diperumum, dengan $n = p^k$ dengan p bilangan prima dan k bilangan bulat positif. Maka rumus umum indeks Sombor rata-rata diberikan oleh

$$SO_{avg}\left(\Gamma_{Q_{4n}}\right) = (4n-1)\sqrt{\left(\frac{32^2-24n+5}{16n^2}\right)}$$

Bukti:
Karena grafnya adalah graf bintang dengan pusat e (Nurhabibah et. al., 2023), diperoleh $deg\ (e) = 4n - 1$ dan $deg\ (x) = 1\ \forall x \in\ V(G), x \neq e$

$$SO_{avg}\left(\Gamma_{Q_{4n}}\right) = \sum_{\{u,v\}\in E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right)} \sqrt{\left(\deg(u) - \frac{2m}{n}\right)^2 + \left(\deg(v) - \frac{2m}{n}\right)^2}$$
$$= (4n-1)\sqrt{\left((4n-1) - \frac{2(4n-1)}{4n}\right)^2 + \left(1 - \frac{2(4n-1)}{4n}\right)^2}$$
$$= (4n-1)\sqrt{\left(\frac{4n-1-8n+2}{4n}\right)^2 + \left(\frac{4n-8n+2}{4n}\right)^2}$$
$$= (4n-1)\sqrt{\left(\frac{-4n+1}{4n}\right)^2 + \left(\frac{-4n+2}{4n}\right)^2}$$
$$= (4n-1)\sqrt{\left(\frac{16^2-8n+1}{16n^2}\right) + \left(\frac{16^2-16n+4}{16n^2}\right)}$$
$$= (4n-1)\sqrt{\left(\frac{32^2-24n+5}{16n^2}\right)}\blacksquare$$

4. KESIMPULAN

Penelitian ini mengkaji teori graf, indeks Sombor, dan aplikasinya pada struktur grup hingga seperti grup dihedral, grup bilangan bulat modulo, dan grup kuaternion yang diperumum. Indeks Sombor yang dihitung untuk graf koprima pada grup ini memberikan rumus umum yang mencerminkan hubungan antara elemen-elemen dalam grup tersebut, serta menunjukkan pola struktural yang terkait dengan sifat topologisnya. Variasi indeks Sombor—standar, tereduksi, dan rata-rata—digunakan untuk mengeksplorasi keterkaitan antara graf dan struktur grup, yang dapat diterapkan dalam klasifikasi grup hingga dan analisis lebih lanjut. Penelitian ini menghasilkan rumus-rumus baru yang menggabungkan konsep-konsep teori graf dalam memodelkan dan menganalisis grup hingga.

5. DAFTAR REFERENSI

1. Cruz, R., Gutman, I., and Rada, J. 2021. Sombor Index of Chemical Graphs. *Apllied Mathematics and Computation*. 399: 2-8.
2. Gazir, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2019). Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral. *Eigen Mathematics Journal*, 73-76.
3. Hua, H., Das, K. C., & Wang, H. (2019). On atom-bond connectivity index of graphs. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 479(1), 1099-1114.
4. Ma, X., Wei, H., & Yang, L. (2014). The coprime graph of a group. *International Journal of Group Theory*, 3(3), 13-23.
5. Malik, D. P., Husni, M. N., Miftahurrahman, M., Wardhana, I. G. A. W., & Semil, G. (2024). the Chemical Topological Graph Associated With the Nilpotent Graph of a Modulo Ring of Prime Power Order. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 7(1), 1-9.
6. Malik, D. P., Wardhana, I. G. A. W., Dewi, P. K., Widiastuti, R. S., Maulana, F., Syarifudin, A. G., & Awanis, Z. Y. (2023). Graf Nilpoten Dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima. *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 8(1), 28-33.
7. Ningrum, S. H. P., Siboro, A. M., Lestari, S. T., Wardhana, I. G. A. W., & Awanis, Z. Y. (2024). Abstraksi chemical topological graph (CTG) melalui indeks topologis graf aljabar. *Prosiding SAINTEK*, 6, 92-100.
8. Nurhabibah, N., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2023). Numerical invariants of coprime graph of a generalized quaternion group. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 29(1), 36-44.
9. Pratama, R.B., Maulana, F., Abdurahim, Wardhana, I.G.A.W. (2024). Topological Indices of GCD Graph Representations for Integer Modulo Groups with Prime Power Order. *Proceedings of Science and Mathematics*, 26, 79-84.
10. Putra, L. R. W., Pratiwi, L. F., Miftahurrahman, Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W. (2024). Topological Indices of Coprime Graph of Generalized Quaternion Group. *Proceedings of Science and Mathematics*, 26, 53-58.
11. Putri, S., Maulana, F., Hijriati, N., Wardhana, I. G. A. W. (2024). Sombor Index, Reduced Sombor Index, and Average Sombor Index of Coprime Graph Associated to the Dihedral Groups of Order $\mathbf{2n}$. *Proceedings of Science and Mathematics*, 26, 85-93.
12. Satriawan, D., Aini, Q., Abdurahim, F. M., Adhitya, I. G., & Wardhana, W. Molecular Topology Index of a Zero Divisor Graph on a Ring of Integers Modulo Prime Power Order, *Contemporary Mathematics and Applications* 6(2), 72-82.
13. Siboro, A. M., Maulana, F., Hijriati, N., Wardhana, I. G. A. W. (2024). The Sombor Index and Its Generalization of The Coprime Graph for the Generalized Quaternion Group. *Proceedings of Science and Mathematics*, 26, 65-70.
14. Wahidah, F. M., Maulana, F., Hijriati, N., Wardhana, I. G. A. W. (2024). The Sombor Index of the Nilpotent Graph of Modulo Integer Numbers. Proceedings *of Science and Mathematics*, 26, 48-52.