

EKSPLORASI INDEKS GUTMAN PADA GRAF MOLEKULER BERBASIS GRUP HINGGA

Lia Fitta Pratiwi, Qurratul Aini^{1*}, Muhammad Rijal Alfian, Lalu Riski Wirendra Putra
Program Studi Matematika, Universitas Mataram

*Corresponding Author Email: qurratulaini.aini@unram.ac.id

ABSTRAK.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji dan mengembangkan rumus umum dari Gutman index dalam konteks graf molekuler yang terkait dengan grup hingga. Studi ini diawali dengan kajian literatur mendalam mengenai teori graf, Gutman index, serta aplikasinya dalam kimia matematika dan grup hingga. Grup hingga yang dipilih untuk dianalisis didasarkan pada kriteria kompleksitas struktur dan relevansi topologis. Setiap grup hingga dipetakan menjadi graf molekuler, dengan elemen grup direpresentasikan sebagai simpul dan operasi grup sebagai sisi graf. Gutman index kemudian dihitung menggunakan rumus yang ada serta perangkat lunak matematika untuk memfasilitasi perhitungan yang lebih kompleks. Hasil perhitungan ini digunakan untuk mengembangkan rumus umum Gutman index untuk graf molekuler pada grup hingga, diikuti dengan analisis pola dan keterkaitannya dengan struktur grup. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi baru dalam memahami hubungan antara Gutman index dan struktur topologis grup hingga.

Keyword: indeks Gutman, grup hingga, graf molekuler

1. PENDAHULUAN

Salah satu konsep yang telah mendapatkan perhatian luas dalam beberapa dekade terakhir adalah Gutman index, sebuah deskriptor topologis yang diperkenalkan dalam konteks teori graf kimia (Ningrum et.al, 2024). Indeks ini menyandikan informasi struktural dari graf melalui interaksi jarak antara simpul-simpul dan derajat simpul tersebut.

Indeks Gutman, yang diperkenalkan oleh Ivan Gutman, digunakan untuk mengukur jarak total dari semua pasangan simpul dalam sebuah graf dan telah diaplikasikan secara luas dalam kimia matematika untuk mempelajari molekul dan struktur kimia (Gutman, 2013). Dengan merepresentasikan molekul sebagai graf, simpul-simpul merepresentasikan atom, sementara sisi-sisi merepresentasikan ikatan antar atom. Indeks ini memungkinkan prediksi sifat-sifat fisikokimia molekul, seperti stabilitas dan reaktivitasnya (Syarifudin et.al, 2024).

Sebagai tambahan dari Gutman index, beberapa indeks topologi lainnya memiliki peran krusial dalam analisis struktur graf. Salah satu indeks tertua, Wiener index, menghitung jumlah jarak antara semua pasangan simpul dalam graf. Diperkenalkan oleh Harold Wiener, indeks ini banyak digunakan untuk menganalisis rantai hidrokarbon dalam kimia karena membantu memprediksi sifat fisik dan kimia molekul organik (Ardana et.al, 2024). Zagreb index terbagi menjadi First dan Second Zagreb index; indeks ini diperoleh dari jumlah kuadrat derajat simpul, memberikan wawasan tentang kestabilan molekul dalam reaksi kimia, terutama untuk molekul dengan struktur kompleks (Putra et.al, 2023). Selain itu, Harary index, yang didasarkan pada jumlah kebalikan jarak antar simpul, berperan dalam memprediksi kekuatan ikatan kimia antara atom dalam suatu molekul, menunjukkan seberapa terhubungnya sebuah struktur graf. Szeged index, mirip dengan Wiener index, mengukur kontribusi sisi berdasarkan partisi simpul graf, memungkinkan analisis terhadap stabilitas ikatan

kimia (Husni et,al, 2022). Padmakar-Ivan index, atau PI index, berbeda dengan indeks lainnya karena mempertimbangkan bobot sisi dalam perhitungan, cocok untuk menggambarkan ketahanan jaringan molekuler (Ghoffari et,al, 2024).

Selain aplikasinya dalam kimia, indeks Gutman juga digunakan dalam konteks teori grup dan struktur graf. Penelitian terbaru telah menunjukkan bahwa indeks ini dapat diaplikasikan dalam mempelajari sifat-sifat topologis dari graf yang terkait dengan grup hingga, memberikan perspektif baru dalam teori grup dan aplikasi grafisnya (Satriawan et.al, 2024). Dalam makalah ini, kami akan mengeksplorasi bagaimana Gutman index dapat diterapkan pada representasi graf dari grup hingga, serta potensi aplikasinya dalam studi lebih lanjut (Malik et,al, 2024). Di sisi lain, berbagai jenis graf juga telah dikembangkan untuk mewakili hubungan dan struktur matematis tertentu. Graf koprima menyoroti keterhubungan antara simpul-simpul dengan derajat yang relatif prima, memberikan pandangan dalam struktur jaringan yang terdistribusi secara bebas (Aini et,al, 2024). Graf non-koprima adalah kebalikannya, di mana simpul hanya terhubung jika derajat mereka tidak koprima, sering digunakan untuk studi struktur algebra (Aulia et,al, 2023). Jenis lainnya, seperti graf pangkat, digunakan untuk merepresentasikan hubungan antar elemen berdasarkan pangkat dalam struktur grup (Asmarani et,al, 2023), sedangkan graf unit berfokus pada elemen unit dari grup tertentu (Lestari et,al, 2024). Terakhir, graf nilpoten mencerminkan karakteristik grup nilpoten dalam teori grup, memberikan wawasan mendalam tentang hirarki dan stabilitas dalam sistem aljabar kompleks (Malik et,al, 2023).

2. METODOLOGI

Penelitian ini diawali dengan kajian literatur komprehensif mengenai teori graf, Gutman index, serta aplikasinya dalam kimia matematika dan grup hingga. Kajian tersebut mencakup berbagai sumber literatur seperti artikel ilmiah, buku, dan publikasi terbaru yang relevan dengan topik penelitian. Setelah kajian literatur, grup hingga yang akan dianalisis dipilih berdasarkan kriteria tertentu, termasuk kompleksitas struktur dan relevansi topologisnya.

Untuk setiap grup hingga yang dipilih, graf molekuler dibangun sesuai dengan struktur grup tersebut, di mana elemen-elemen grup dipetakan ke simpul dan operasi grup direpresentasikan sebagai sisi-sisi pada graf. Selanjutnya, Gutman index dihitung untuk graf molekuler yang telah dimodelkan, menggunakan rumus Gutman index serta bantuan perangkat lunak matematika untuk melakukan perhitungan yang lebih kompleks. Berdasarkan hasil perhitungan, rumus umum dari Gutman index untuk graf molekuler yang berkaitan dengan grup hingga berhasil dikembangkan. Analisis lebih lanjut dilakukan untuk mengidentifikasi pola serta hubungan antara rumus-rumus tersebut dengan struktur grup yang bersangkutan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini membahas Indeks Gutman dari graf Koprima dari grup Dihedral dan grup bilangan bulat modulo n , serta graf Nilradikal dari bilangan bulat modulo n . Indeks Gutman, yang dilambangkan dengan $Gut(G)$, dihitung dengan menjumlahkan akar kuadrat dari derajat semua vertex dalam graf. Ukuran ini memberikan wawasan berharga tentang kompleksitas dan sifat topologi struktur molekul, menjadikannya alat yang berharga dalam penelitian kimia dan matematika.

Definisi 1. (M. Javaid, et al., 2021) Menyatakan bahwa untuk graf terhubung sederhana G , Indeks Gutman dari G didefinisikan sebagai berikut:

$$Gut(G) = \sum_{u,v \in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v)$$

dengan $deg(u)$, $deg(v)$ adalah derajat dari u dan v , dan $d(u,v)$ adalah jarak simpul u dan v pada graf G .

3.1 Indeks Gutman dari graf Koprime dari grup Dihedral

Suatu grup dengan $n \geq 3$ dan dibangun oleh elemen $a, b \in G$ sehingga $G = \{a, b | a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1}\}$. disebut Grup Dihedral D_{2n} , dinotasikan D_{2n} . Berikut definisi dari grup dihedral dan graf koprime (A. Gazir, et al., 2019).

Definisi 2. (Gazir & Wardhana, 2019) D_n adalah grup dihedral dengan orde $2n$, dengan $n \geq 3$, dan dibangkitkan oleh elemen $a, b \in G$ sehingga $G = \{a, b | a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1}\}$.

Definisi 3. (Ma et.al, 2014) Misalkan G adalah grup hingga, graf koprime dari grup G yang dinotasikan dengan Γ_G adalah graf dengan simpul yang terdiri dari semua elemen dari G , dan dua simpul a dan b terhubung dengan sisi jika $|a, b| = 1$.

Karakteristik dari indeks Gutman dari graf koprime grup dihedral diberikan sebagai berikut.

Teorema 1. (Gayatri et.al, 2023) Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprime dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima, $p \neq 2$ dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks gutman dari graf koprime dari grup dihedral adalah

$$Gut(\Gamma_{D_{2n}}) = n^4 + 4n^3 - 3n^2 - 2n + 1$$

Bukti:

Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprime dari grup dihedral. Ambil $n = p^k$ dengan p bilangan prima, $p \neq 2$ dan $k \in \mathbb{N}$. Diperoleh graf koprime dengan 3 partisi dengan yakni $v_1 = \{e\}$, $v_2 = \{a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, dan $v_3 = \{b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$. Berdasarkan Teorema 2, diperoleh $deg(v_1) = 2n - 1$, $deg(v_2) = n + 1$, dan $deg(v_3) = n$.

Sehingga, indeks gutman dari $\Gamma_{D_{2n}}$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} Gut(G) &= \sum_{u,v \in V(G)} deg(u) deg(v) d(u,v) \\ &= \sum_{v_1, v_2 \in V(G)} deg(v_1) deg(v_2) d(v_1, v_2) \\ &\quad + \sum_{v_1, v_3 \in V(G)} deg(v_1) deg(v_3) d(v_1, v_3) \\ &\quad + \sum_{v_2, v_3 \in V(G)} deg(v_2) deg(v_3) d(v_2, v_3) \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi grup dihedral dan Teorema 2, maka diperoleh:

jumlah pasangan simpul pada $V(v_1, v_2) = n - 1$

jumlah pasangan simpul pada $V(v_1, v_3) = n$

jumlah pasangan simpul pada $V(v_2, v_3) = n(n - 1)$

sehingga,

$$Gut(\Gamma_{D_{2n}}) = ((2n - 1)(n + 1)(n - 1)) + ((2n - 1)(n)(n)) + ((n + 1)(n)(n - 1)n)$$

$$\begin{aligned} &= ((2n - 1)(n^2 - 1)) + (2n^3 - n^2) + (n^4 - n^2) \\ &= 2n^3 - 2n - n^2 + 1 + 2n^3 - n^2 + n^4 - n^2 \\ &= n^4 + 4n^3 - 3n^2 - 2n + 1 \end{aligned}$$

3.2 Indeks Gutman dari graf koprima grup bilangan bulat modulo n .

Teorema 2. (Husni et.al, 2022) Misalkan Γ_{Z_n} adalah graf koprima dari grup bilangan bulat modulo n . Jika $n = p^k$ untuk suatu bilangan prima p dan $k \in \mathbb{N}$ maka

$$Gut(\Gamma_{Z_n}) = (n - 1)(2n - 3)$$

Bukti:

Misalkan Γ_{Z_n} adalah graf koprima dari grup Z_n . Ambil $n = p^k$ suatu bilangan prima dan $k \in \mathbb{N}$. Berdasarkan definisi 4, diperoleh $deg(e) = n - 1$ dan $deg(v) = 1$ dan berdasarkan definisi 5 dan pola yang terbentuk, diperoleh $d(e, v) = 1$ dan $d(u, v) = 2$ jika u dan v tidak sama dengan e , diperoleh bahwa banyaknya pasangan dua vertex berbeda pada Γ_{Z_n} adalah sebagai berikut.

untuk $d(e, u)$

$$C_1^{n-1} = \frac{(n - 1)!}{((n - 1) - 1)! (1)!} = (n - 1)$$

untuk $d(u, v)$

$$C_2^{n-1} = \frac{(n - 1)!}{((n - 1) - 2)! (2)!} = \frac{(n - 1)(n - 2)}{(2)}$$

Maka kita memiliki

$$\begin{aligned} Gut(\Gamma_{Z_n}) &= \sum_{(u,v) \in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v) \\ Gut(\Gamma_{Z_n}) &= \sum_{(e,v) \in V(Z_n)\{e\}} deg(e)deg(v)d(u,v) + \sum_{(u,v) \in V(Z_n)\{e\}} deg(u)deg(v)d(u,v) \\ Gut(\Gamma_{Z_n}) &= (n - 1)(n - 1)(1)(1) + \left(\frac{(n - 1)(n - 2)}{(2)} \right) (1)(1)(2) \\ Gut(\Gamma_{Z_n}) &= (n - 1)(2n - 3) \end{aligned}$$

Dengan demikian telah dibuktikan bahwa indeks Gutman dari graf koprima untuk grup bilangan bulat modulo n dengan $n = p^k$ adalah $(n - 1)(2n - 3)$.

3.3 Indeks Gutman graf Nilradikal pada bilangan bulat modulo n .

Definisi 4. (Chandra et.al, 2017) Graf nilradikal, dinotasikan dengan $N(G)$, adalah graf yang simpul-simpulnya merupakan elemen nilpoten tak nol dari G dan dua simpul dikatakan terhubung dengan sisi jika dan hanya jika hasil kali kedua simpul tersebut sama dengan 0.

Teorema 3. (Afifah et.al, 2023) Bentuk umum indeks Gutman graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan yaitu:

$$Gut(N(Z_{n=p^2})) = \left(\frac{(p - 2)^2 + (p - 2)}{2} \right) (p - 2)^2$$

Bukti:

Untuk $n = p^2$ dimana p adalah bilangan prima dengan $p \geq 3$, maka unsur-unsur nilpotent dari $N(Z_n)$ terdiri dari kelipatan p , terdapat $(p - 1)$ unsur yang habis dibagi p^2 , Unsur-unsur ini membentuk graf komplit (mengacu pada Teorema 1 dan 2)

Gelanggang komutatif dengan satuan yang akan diteliti menurut jurnal rujukan [19] yaitu adalah bilangan bulat modulo n (Z_n) dan jurnal [2] dibatasi pada nilai n nya, yang mana n tersebut adalah kuadrat bilangan prima yang lebih dari sama dengan 3 ($n = p^2, p \geq 3$). Apabila dipilih $n = 4$ atau $p = 2$ maka graf yang terbentuk adalah graf trivial atau graf yang hanya memiliki 1 titik saja. Sehingga, dipilihlah p yang lebih dari sama dengan 3, yaitu $p = \{3,5,7,11,13, \dots, \infty\}$ karena p merupakan kuadrat dari n dengan $n = \{9,25,49,121,169, \dots, \infty\}$ yang mana graf-graf tersebut membentuk graf komplit. Karena struktur graf komplit ini, maka setiap vertex memiliki degree yang sama, yaitu $(p - 2)$, semua jarak antar vertex (*distance*) bernilai 1, dan total banyaknya jarak membentuk bilangan segitiga: $\left(\frac{1}{2}((p - 2)^2 + (p - 2))\right)$

Sehingga bentuk umum dari indeks Gutman graf nilradikal pada bilangan bulat modulo n adalah:

$$\begin{aligned} Gut(G) &= \sum_{u,v \in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v) \\ Gut(N(Z_n)) &= \sum_{u,v \in V(N(Z_n))} deg(u)deg(v)d(u,v) \\ &= deg(u)deg(v)d(u,v) + \dots + deg(y)deg(z)d(y,z) \\ &\quad \left(\text{sebanyak} \left(\frac{1}{2}((p - 2)^2 + (p - 2)) \right) \right), \exists y, z \in V(N(Z_n)) \\ &= (p - 2)(p - 2)(1) + \dots + (p - 2)(p - 2)(1) \\ &\quad \left(\text{sebanyak} \left(\frac{1}{2}((p - 2)^2 + (p - 2)) \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}((p - 2)^2 + (p - 2)) \right) (p - 2)(p - 2)(1) \\ &= \left(\frac{(p - 2)^2 + (p - 2)}{2} \right) (p - 2)^2 \end{aligned}$$

4. KESIMPULAN

Bentuk umum indeks Gutman dari graf koprima dari grup dihedral, graf koprima dari grup bilangan bulat modulo n dengan $n = p^k$ untuk suatu bilangan prima p dan $k \in N$, dan graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan yang dibatasi pada

bilangan bulat modulo n , dengan $n = p^2$ dan $p \geq 3$ berturut-turut adalah $Gut(\Gamma_{D_{2n}}) = n^4 + 4n^3 - 3n^2 - 2n + 1, 2\binom{n-1}{2} dan (n-1)(2n-3) dan \left(\frac{(p-2)^2+(p-2)}{2}\right)(p-2)^2$.

Untuk penelitian selanjutnya, disarankan melakukan analisis indeks Gutman pada berbagai jenis grup hingga untuk memperluas cakupan studi.

5. DAFTAR REFERENSI

1. Afifah, L., Sujarwo, I., & Khudzaifah, M. (2023). Indeks Harmonik dan Indeks Gutman Graf Nilradikal pada Gelanggang Komutatif dengan Satuan. *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*, 2(4), 138-143.
2. Aini, Q., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Salwa, S. (2024). Some properties of the coprime graph of square matrices over integer modulo. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2867, No. 1). AIP Publishing.
3. Ardana, A. P., Satriyantara, R., & Widiastuti, R. S. (2024). INDEKS WIENER DARI BEBERAPA STRUKTUR ALJABAR. PARAMETER: Jurnal Matematika, Statistika dan Terapannya, 3(02), 169-180.
4. Asmarani, E. Y., Lestari, S. T., Purnamasari, D., Syarifudin, A. G., Salwa, S., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). The first zagreb index, the wiener index, and the gutman index of the power of dihedral group. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, 7(4), 513-520.
5. Aulia, S. A., Wardhana, I. G. A. W., Irwansyah, I., Salwa, S., Misuki, W. U., & Nghiem, N. D. H. (2023). The Structures of Non-Coprime Graphs for Finite Groups from Dihedral Groups with Regular Composite Orders. *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5(2), 115-122.
6. Chandra, S., Prakash, O., & Suthar, S. (2017). Some properties of the nilradical and non-nilradical graphs over finite commutative ring Zn. *Algebra and Discrete Mathematics Research Article*, 24(2).
7. Furtula, B., & Gutman, I. (2015). A forgotten topological index. *Journal of Mathematical Chemistry*, 53(4), 1184-1190.
8. Gayatri, M. R., Fadhilah, R., Lestari, S. T., Pratiwi, L. F., Abdurahim, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). Topology index of the coprime graph for dihedral group of prime power order. *Jurnal Diferensial*, 5(2), 126-134.
9. Gayatri, M. R., Nurhabibah, N., Aini, Q., Awanis, Z. Y., Salwa, S., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). The clique number and the chromatics number of the coprime graph for the generalized quaternions group. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, 7(2), 409-416.
10. Gazir, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2019). Subgrup non trivial dari grup dihedral. *Eigen Mathematics Journal*, 2(2), 73-76.
11. Ghoffari, L., Wardhana, I., & Abdurahim, A. (2024). Indeks Padmakar-Ivan dan indeks Randic pada graf non-koprime dari grup bilangan bulat modulo. *Majalah Ilmiah Matematika Dan Statistika*, 24(1), 73-84.
12. Gutman, I. (2013). *Degree-based topological indices*. Croatia Chemica Acta, 86(4), 351-361.
13. Gutman, I., & Polansky, O. E. (1986). *Mathematical Concepts in Organic Chemistry*. Springer.
14. Hall, L. H., & Kier, L. B. (1976). *Molecular Connectivity in Chemistry and Drug Research*. Academic Press.
15. Hua, H., Das, K. C., & Wang, H. (2019). On atom-bond connectivity index of graphs. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 479(1), 1099-1114.
16. Husni, M. N., Syafitri, H., Siboro, A. M., Syarifudin, A. G., Aini, Q., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). The harmonic index and the gutman index of coprime graph of integer group modulo with order of prime power. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 16(3), 961-966.
17. Husni, M. N., Wardhana, I. G. A. W., Dewi, P. K., & Suparta, I. N. (2024). Szeged Index and Padmakar-Ivan Index of Nilpotent Graph of Integer Modulo Ring with Prime Power Order. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, 20(2), 332-339.
18. Javaid, M., Siddique, M. K., & Bonyah, E. (2021). Computing Gutman Connection Index of Thorn Graphs. *Journal of Mathematics*.
19. Lestari, S. T., Dewi, P. K., Wardhana, I. G. A. W., & Suparta, I. N. (2024). Algebraic Structures and Combinatorial Properties of Unit Graphs in Rings of Integer Modulo with Specific Orders. *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, 7(2), 89-92.
20. Ma, X., Wei, H., & Yang, L. (2014). The coprime graph of a group. *International Journal of Group Theory*, 3(3), 13-23.
21. Malik, D. P., Husni, M. N., Miftahurrahman, M., Wardhana, I. G. A. W., & Semil, G. (2024). the Chemical Topological Graph Associated With the Nilpotent Graph of a Modulo Ring of Prime Power Order. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 7(1), 1-9.
22. Malik, D. P., Wardhana, I. G. A. W., Dewi, P. K., Widiastuti, R. S., Maulana, F., Syarifudin, A. G., & Awanis, Z. Y. (2023). Graf Nilpoten Dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima. *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 8(1), 28-33.
23. Mazarodze, J. P., Mukwembi, S., & Vetric, T. (2016). The gutman index and the edge-wiener index of graphs with given vertex-connectivity. 36(4), 867-876.
24. Maulana, M., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. and Semil, G. (2023). Some Characteristics of the Prime Graph of Integer Modulo Groups. *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5(1), 38-46.
25. Ningrum, S. H. P., Siboro, A. M., Lestari, S. T., Wardhana, I. G. A. W., & Awanis, Z. Y. (2024). Abstraksi chemical topological graph (CTG) melalui indeks topologis graf aljabar. *Prosiding SAINTEK*, 6, 92-100.

26. Ningrum, H. K., Asmarani, E. Y., Wardhana, I. G. A. W., Salwa, & Awanis, Z. Y. (2023, September). The Wiener Index, the Harmonic Index, and the Graph Representation of the Prime Ideal Graph for the Integers Modulo Rings with Prime Power Order. In *International Conference on Mathematics: Pure, Applied and Computation* (pp. 407-415). Singapore: Springer Nature Singapore.
27. Nurhabibah, N., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2023). Numerical invariants of coprime graph of a generalized quaternion group. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 29(1), 36-44.
28. Pratama, R.B., Maulana, F., Abdurahim, Wardhana, I.G.A.W. (2024). Topological Indices of GCD Graph Representations for Integer Modulo Groups with Prime Power Order. *Proceedings of Science and Mathematics*, 26, 79-84.
29. Putra, L. R. W., Awanis, Z. Y., Salwa, S., Aini, Q., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). The Power Graph Representation For Integer Modulo Group With Power Prime Order. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 17(3), 1393-1400.
30. Putra, L. R. W., Pratiwi, L. F., Miftahurrahman, Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W. (2024). Topological Indices of Coprime Graph of Generalized Quaternion Group. *Proceedings of Science and Mathematics*, 26, 53-58.
31. Putri, S., Maulana, F., Hijriati, N., Wardhana, I. G. A. W. (2024). Sombor Index, Reduced Sombor Index, and Average Sombor Index of Coprime Graph Associated to the Dihedral Groups of Order $2n$. *Proceedings of Science and Mathematics*, 26, 85-93.
32. Satriawan, D., Aini, Q., Abdurahim, F. M., Adhitya, I. G., & Wardhana, W. Molecular Topology Index of a Zero Divisor Graph on a Ring of Integers Modulo Prime Power Order, *Contemporary Mathematics and Applications* 6(2), 72-82.
33. Siboro, A. M., Maulana, F., Hijriati, N., Wardhana, I. G. A. W. (2024). The Sombor Index and Its Generalization of The Coprime Graph for the Generalized Quaternion Group. *Proceedings of Science and Mathematics*, 26, 65-70.
34. Syarifudin, A. G., Muchtadi-Alamsyah, I., & Suwastika, E. (2024). Topological Indices and Properties of the Prime Ideal Graph of a Commutative Ring and its Line Graph. *Contemporary Mathematics*, 1342-1354.
35. Wahidah, F. M., Maulana, F., Hijriati, N., Wardhana, I. G. A. W. (2024). The Sombor Index of the Nilpotent Graph of Modulo Integer Numbers. *Proceedings of Science and Mathematics*, 26, 48-52.
36. Yatin, B. Z., Gayatri, M. R., Wardhana, I. G. A. W., & Prayanti, B. D. A. (2023). Indeks Hyper-Wiener Dan Indeks Padmakar-Ivan Dari Graf Koprime Dari Grup Dihedral. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, 7(2), 138-147.